ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«РЫБИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АВИАЦИОННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ
П. А. СОЛОВЬЕВА»
(РГАТУ имени П.А. Соловьева)

ОБРАЗОВАТЕЛЬНАЯ ПРОГРАММА ПОДГОТОВКИ
АСПИРАНТОВ

направление подготовки 09.06.01 Информатика и вычислительная техника

профиль подготовки 05.13.06 Автоматизация и управление технологическими процессами и производствами (в промышленности)

# КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

**по дисциплине**

## Моделирование систем управления и их элементов

Разработал: д.т.н. Юдин В. В.

Рыбинск, 2014 г.

Рассматриваются методы анализа и моделирования линейных и нелинейных электрических цепей постоянного и переменного тока, строить простейшие физические и математические модели приборов, схем, устройств и установок электроники различного функционального назначения. Осваивается применение блочных матриц для моделирования сложных объектов, взаимное преобразование матричных моделей, модели входных сигналов, модели внешних факторов, метод объединенных матриц.

**Содержание**

**Лекция 1. Математические объекты, используемые при представлении экспериментальных данных.**

***Множество***

Понятие множества является одним из основных понятий математики. Оно вводится аксиоматически и не может быть определено через какие-либо элементарные понятия. Описательное объяснение понятия множества: совокупность, объединение некоторых объектов произвольной природы – элементов множества.

Множества чаще всего обозначаются прописными буквами латинского алфавита *A, B, ... X,* а их элементы – малыми буквами: a,b,…x. Задавать множество можно перечислением его элементов $A=\{a_1,a_2,..a_n\}$. Можно задавать множество путем указания свойства *H(x),* присущие только элементам этого множества. Этот факт записывают следующим образом $\{x/H(x)\}$ или $\{x:H(x)\}$.

Говорят: элемент $a_i$ принадлежит множеству $A$ и записывают $a_i \in A$. Множество $B$ называется подмножеством множества $A$, если все элементы множества $B$ принадлежат множеству $A$, что записывают следующим образом $B \subset A$.

Множества изучает специальный раздел математики – теория множеств. При этом рассматриваются операции под множествами, а также различные отношения между ними и отображения.

Простейшими операциями над множествами $A$ и $B$ являются:

- объединение $A \bigcup B$ (образование множества, состоящего из элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств $A$ или $B$);

- пересечение $A \bigcap B$ (образование множества, состоящего из всех элементов, принадлежащих одновременно $A$ и $B$);

- декартово произведение множеств $A$ x $B$ (образование множеств всех упорядоченных пар ($a, b$), где $a \in A,\ b \in B$).

Аналогичным образом определяются операции над *n* множествами $A_1, A_2,...A_n$. При этом используются обозначения

$\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ - для объединения множеств;

$\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$ - для их пересечения;

$\mathop{X}\limits_{i=1}^{n} A_i$ - для их декартова произведения.

***Отношения и отображения***

Бинарным отношением на множестве $A$ называется подмножество множества $A^2 = A x A$. Аналогично, $n$ –арным отношением на этом множестве называется подмножество декартовой $n$ -й степени

$A^n = A x A x ... x A$.

Известны отношения эквивалентности, порядка включения и т.д.

Отображением $\varphi$ множества $A$ в множество $B$ называется правило, по которому каждому элементу множества $A$ сопоставляются один или несколько элементов множества $B$ (записывается $\varphi$: $A \to B$). Иначе отображение можно трактовать, как отношение между множествами $A$ и $B$, т.е. отождествлять с некоторым подмножеством декартова произведения $A$ x $B$.

В сущности отображение определяет функцию с областью определения в $A$ и областью значений в $B$. При этом заданию функции соответствует выполнение условий истинности некоторого высказывания.

Для задания отношений используют различные способы. В простейшем случае они могут задаваться: перечислением всех пар элементов множеств, находящихся в данном отношении; словесным определением; таблицами; диаграммами; матрицами; графиками. Если множество пар элементов бесконечно или конечно, но очень большое, то для задания отношений и отображений используют уравнения и неравенства.

С понятием отображения связано понятие *операции.* Под n- арной операцией на множестве *A* понимают отображение $\varphi: A^n \to A$), где $A^n$ - декартова *n*-я степень множества *A*. При n = 0 имеет место нуль-местная операция. Под нею понимают выделение элемента из множества *A*. При *n* = 1 имеет место унарная операция. Примерами унарной операции служат отрицание в алгебре логики и дифференцирование на множестве дифференцируемых функций. При *n* = 2 имеет место бинарная операция. Примерами ее являются сложение и умножение на множестве действительных чисел.

***Число***

Понятие числа тесно связано с понятием множества. Различают следующие разновидности чисел: натуральные числа (числа 1, 2, 3, …*n*,…, используемые для счета), которые подразделяются на простые (делителем их являются они сами и число единица) и составные; целые числа, включающие в свой состав натуральные числа, отрицательные числа и число нуль; рациональные (которые могут быть представлены в виде дроби $m/n$, где *m* и *n* - простые натуральные числа) и иррациональные числа (не обладают такими свойствами); алгебраические (являются корнями уравнения вида:

$$n_0 x^k + n_1 x^{k-1} + \ldots n_{k-1} x + n_k = 0$$

с целыми коэффициентами) и трансцендентные (не являются корнями указанного уравнения) числа; действительные числа (включают в свой состав рациональные, иррациональные, алгебраические и трансцендентные числа).

Дальнейшим расширением понятия числа явилось введение многомерных чисел.

Под *n* - мерным числом понимают упорядоченную совокупность любых действительных чисел $\mathbf{Z_i} \quad (\mathbf{i = 1, 2, \ldots n})$ . Эти числа образуют *n* - мерное числовое пространство. Каждое из чисел этого пространства представляет некоторую точку, положение которой определяется *n* координатами.

С многомерными числами можно производить начисления также, как с действительными (одномерными) числами, если предварительно определить, что следует понимать под суммой и произведением двух многомерных чисел. При этом в каждом случае возникает специальная алгебра с правилами оперирования, более или менее напоминающими правила обычной алгебры. Полного совпадения можно достичь только в двумерном случае для комплексных чисел.

Комплексными числами называются двумерные числа (пары чисел) $A_1 = (a_1, b_1)$ $A_2 = (a_2, b_2)$ и т.д., в которых *a* называется действительной частью числа, *b*- его мнимой частью. При выполнении операции *a* ведет себя, как обыкновенное число, а число *b*- как число, квадрат которого равен -1. Для записи комплексных чисел пользуются формой $A = a + ib$. Число $\sqrt{a^2 + b^2} = |A|$ называется абсолютной величиной, или модулем комплексного числа *A*

Комплексные числа являются частным случаем гиперкомплексных чисел порядка $2^n$. Среди этих чисел находят практическое применение кватернионы (соответствуют *n* = 2), бикватернионы (соответствуют **n** =3), клиффордовы числа (соответствуют *n* = 4). Комплексным числам в алгебре гиперкомплексных чисел соответствует *n* = 1.

При анализе линейных электрических цепей находят применение также специальные, так называемые обобщенные числе. Сущность применения обобщенных чисел сводится к тому, что в частично упорядоченных множествах символы их обозначений $W_{me}, W_{me\alpha}, W_\alpha$ заменяются их цифровыми индексами т.е., $me, me\alpha, \quad \alpha$, являющимися элементами обобщенного числа. При помощи множеств цифровых индексов можно отобразить не только векторные свойства элементов модели системы, определяющих их положение (адрес), но и скалярные (весовые) свойства этих элементов.

***Вектор***

Под вектором понимают элемент произвольной природы, относительно которого определены две операции:

1. Сложение векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$, обозначаемое $\vec{x} + \vec{y}$.
2. Умножение вектора $\vec{x}$ на произвольный элемент $\alpha$, обозначаемое $\alpha \vec{x}$

При этом $\vec{x} + \vec{y}$ и $\alpha \vec{x}$ также являются векторами.

Вектор представляет собой такую функцию точки, которая каждой точке ставит в соответствие определенное число (алгебраический элемент) и определенное направление (геометрический элемент).

Различают следующие типы векторов.

I. Связный вектор, представляющий собой направленный отрезок с началом в точке А и концом в точке В (обозначают $\overrightarrow{AB}$). О векторе $\overrightarrow{AB}$ говорят также, что он приложен к точке А. Направление, определяемое лучом, называется направлением вектора, а длина отрезка АВ называется модулем вектора.

2. Свободный вектор, определяемый как вектор равный по модулю вектору $\overrightarrow{AB}$ и одинаково с ним направленный.

3. Единичный вектор (орт), представляющий собой вектор, модуль которого равен единице. Единичные векторы координатных осей $0x, 0y, 0z$ обозначаются соответственно через *i, j, k.*

Любой вектор а может быть разложен на составляющие $a_x, a_y, a_z$ относительно координатных осей $0x, 0y, 0z$ и определен через эти составляющие следующим образом:

$a = ia_x + ja_y + ka_z$.

При задании вектора *a* координатами $a_x, a_y, a_z$ сокращенно пишут:

$a = (a_x, a_y, a_z)$.

Обобщенно (для случая *n* - мерного пространства) вектор определяется как произвольный упорядоченный набор $a_1, a_2, ..a_n$ из *n* действительных чисел (координат), при этом для n-мерного вектора пишут $a = (a_1, a_2, ..a_n)$ и говорят о векторе-строке. Возможно также представление n -мерного вектора в виде столбца

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{pmatrix}$$

В этом случае говорят о векторе-столбце.

***Матрица***

Матрицей А называют прямоугольную таблицу, состоящую из элементов произвольной природы. Элементы матрицы располагаются в строки и столбцы. Для их обозначений используется двойная индексация $a_{ij}$, в которой первый индекс i обозначает номер строки *A*, в которой стоит элемент $a_{ij}$, а второй индекс *j* означает номер столбца А, в котором стоит элемент $a_{ij}$. В символическом обозначении матрицу обычно заключают в круглые или квадратные скобки или двойные вертикальные черточки:

$$A=\left(a_{i\,j}\right)=\left\|a_{i\,j}\right\|=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{Vmatrix}$$

Пара чисел (*m, n*), где *m* – число строк в матрице, *n* – число столбцов в ней, определяют размер (размерность, тип) матрицы. Для обозначения размера используют запись $(m,n)$.

Часто обозначение размера записывают непосредственно в обозначении матрицы следующим образом:

$$A=\left(a_{ij}\right)_{(m,n)}=A_{(m,n)}=\left\|a_{ij}\right\|_m^n$$

В случае, если $m = n$, матрицу *A* называют квадратной. Число $m = n$ при этом называют порядком квадратной матрицы.

Матрица типа $(m,1)$ состоит только из одного столбца. Она может также, исходя из координатного представления вектора, понимается как вектор-столбец. Матрица типа (1, n) состоит только из одной строки и представляет собой вектор-строку. Матрица может состоять из одного единственного элемента. Такая матрица имеет тип *(1, 1)*.

Квадратная матрица, элементы которой $a_{ij}$, при $i \neq j$ равны нулю, называется *диагональной* матрицей. Диагональная матрица, у которой все элементы главной диагонали равны между собой, называется *скалярной* матрицей. Если в скалярной матрице все элементы главной диагонали равны 1, то такая матрица называется *единичной*.

Если все элементы квадратной матрицы, стоящие ниже главной диагонали, равны нулю, матрица называется *верхней треугольной*, если нулю равны элементы, стоящие выше главной диагонали, матрица называется *нижней треугольной*.

Если все элементы матрицы равны нулю, то такая матрица называется *нулевой*. В матричном исчислении она играет ту же роль, что нуль в алгебре.

В ряде случаев матрицу *A* бывает удачно представлять в виде блоков При этом элементами матрицы $A$ служат блоки (матрицы) Действия над блочными матрицами производятся по тем же формальным правилам, как и в случае, когда вместо блоков имеет место числовые элементы.

*2.5. Функция*

Понятие функции является одним из важнейших понятий математики. Под функцией в общем случае понимают определенное некоторым законом $\oint$ отображение элементов $x$ множества X множество y. Для функции используют обозначения:

$$\mathbf{y} = f(x);\ x \to f(x);\ x \xrightarrow{f} \mathbf{y};\ x \to \mathbf{y};\ xfy, \text{ где } x \in \mathrm{X}, \quad y \in Y.$$

Элемент $x$ из $\mathrm{X}$ называют аргументом или переменной. Элемент $y$ называют значением функции на элементе $x$ или образом элемента $x$ при отображении $f$.

В зависимости от природы множеств $\mathrm{X}$ и $Y$ получают различные типы функций. Если $\mathrm{X}$ и $Y$ некоторые множества действительных чисел, то имеет место функция действительной (вещественной) переменной. Если $\mathrm{X}$ - некоторое множество действительных чисел, а $Y$ - некоторое множество комплексных чисел, то имеет место комплексно-значная функция действительной переменной. Если $\mathrm{X}$ и $Y$ некоторые множества комплексных чисел, то имеет место комплексно-значная функция комплексной переменной.

Если $X$ - множество упорядоченных наборов $n$ элементов $(x_1, x_2, \ldots x_n)$, где $x_1, x_2, \ldots x_n$ принимают числовые значения, а $Y$ - некоторое множество действительных чисел, то имеет место функция многих переменных **y** = = $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$.

В том случае, когда $X$ и $Y$ не являются числовыми множествами, это оговаривают в названии функции или применяют специальные названия: например, векторная функция скалярного аргумента (градиент); скалярная функция векторного аргумента (дивергенция); векторная функция векторного аргумента (ротор); функция, принимающая матричные значения; функционал; оператор.

*2.6. Последовательность*

Под последовательностью понимают функцию, заданную на подмножестве натуральных чисел. Иначе говоря, если $n$ числам от $m$ до $m+n-1$ поставить в соответствие $n$ предметов, то образуется последовательность, для элементов которой соответствующие им числа служат индексами.

Если предметы, о которых идет речь, являются действительными одномерными числами: $a_m, a_{m+1}, \ldots a_{m+a-1}$, то говорят о числовой последовательности $\varphi$. Для нее используют обозначения

$\varphi(K) = aK$ или $\varphi = \{aK\}$.

Если предметы являются – мерными числами, то говорят о последовательности точек. Для нее используют обозначение:

$\varphi(K) = p(x_1^K, x_2^K, \ldots x_\ell^K)$ или $\varphi = \{P_K\}$,

где $\varphi(K) = p(x_1^K, x_2^K, \ldots x_\ell^K)$ - координаты $K$ -го $\ell$ - мерного числа.

Последовательность в зависимости от целей и задач исследования может быть представлена в одном из следующих видов:

1) матрицей – строкой ($a_K$) с элементами ($a_m, a_{m+1}, \ldots a_{m+a-1}$);

2) функцией целочисленного аргумента $K$, определенной на множестве чисел от $m$ до $m+n-1$, значениями которой служат числа $a_K$;

3) $n$ - мерным вектором ($a_m, a_{m+1}, \ldots a_{m+a-1}$).

Если дан некоторый закон построения последовательности, позволяющий продолжить ее сколь угодно далеко, то возникает бесконечная последовательность. Она называется дискретной или плотной, смотря по тому является ли разность между ее соседними элементами конечным или бесконечно малым. Индекс плотной последовательности можно рассматривать как переменную (параметр), а силу последовательности – как непрерывную функцию этой переменной.

В известном случае функцию можно рассматривать как предельный случай (при $n \to \infty$). Матрицы – строки или как вектор в бесконечно мерном пространстве. Отсюда вытекают далеко идущие аналогии между функциями и векторами.

*2.7. Ряд*

Рядом называют формально составленную последовательность символов, соединенных знаком «+», например:

$$\sum_{K=1}^{\infty} a_K = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots;$$

$$\sum_{K=-\infty}^{\infty} a_K = \ldots a_K + \ldots + a_{-1} + a_0 + a_1 + \ldots + a_K + \ldots;$$

$$\sum_{\substack{j_1 \\ K=1}}^{\infty} a_{jK} = a_{11} + a_{12} + \ldots + a_{1K} + \ldots$$

$$+ a_{21} + a_{22} + \ldots + a_{2K} + \ldots$$

$$- - - - - - - - - - - - - - - - -$$

$$+ a_{j1} + a_{j2} + \ldots + a_{jK} + \ldots$$

$$- - - - - - - - - - - - - - - -$$

Символы последовательности $a_1, a_2, \ldots a_K \ldots$ , называемые членами ряда, могут обозначать: числа, функции, векторы, матрицы и т.п. Соответственно этому различают ряды числовые, функциональные, векторов, матриц.

Последовательность $\{S_n\}$, определенную следующим образом

$$S_1 = a_1; \quad S_2 = a_1 + a_2; \quad \ldots S_n = \sum_{K=1}^{n} a_K$$

называют последовательностью частичных сумм ряда.

Если последовательность частичных сумм имеет предел $S$ , т.е. $\lim S_n = S$ , то говорят, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится и имеет сумму $S$ и пишут $\sum_{K=1}^{n} a_K = S$ . Если последовательность частичных сумм не имеет конечного предела, то ряд называется расходящимся.

*2.9. Функционал*

Под функционалом понимают отображение множества функций на множество чисел, т.е. функционал – это такое соотношение, при котором каждой функции в соответствии ставится некоторое число.

Функционалами являются, например, среднее по модулю $X_{cp}$ и действующее $X$ значения несинусоидальной периодической величины $x(t)$, определенные выражениями

$$X_{cp} = \frac{1}{T}\int_0^T |x(t)|\, dt, \qquad X = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T x^2(t) \cdot dt}$$ , где T – период ее изменения.

## Лекция 2. Задание комплексных чисел. Основные функции.

*Задание матриц:*

⇒ С клавиатуры при использовании явного списка

| Ввод | | Матрица |
|---|---|---|
| $>> A = [1\ 2\ 3;\ 4\ 5\ 6;\ 7\ 8\ 9]$ | $>> A =$ [1 2 3<br>4 5 6<br>7 8 9] | $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ |

⇒ С файла *m*-типа, содержащего операторы, задающие матрицу путем указания имени этого файла

| Содержание файла *a.m* | Ввод | Матрица |
|---|---|---|
| $A = [1\ 2\ 3;\ 4\ 5\ 6;\ 7\ 8\ 9]$ | A | $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ |

*Структура матрицы*

| Ввод | Матрица | Ввод | Матрица |
|---|---|---|---|

| | | | |
|---|---|---|---|
| $B=[A;10\ 11\ 12]$ | $B=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\\10&11&12\end{pmatrix}$ | $C=[A\ A]$ | $C=\begin{pmatrix}1&2&3&1&2&3\\4&5&6&4&5&6\\7&8&9&7&8&9\end{pmatrix}$ |
| $D=[A;A]$ | $D=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\\1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$ | $E=[B\ B;C]$ | $E=\begin{pmatrix}1&2&3&1&2&3\\4&5&6&4&5&6\\7&8&9&7&8&9\\10&11&12&10&11&12\\1&2&3&1&2&3\\4&5&6&4&5&6\\7&8&9&7&8&9\end{pmatrix}$ |

*Запись чисел*

| Обычная десятичная форма | С масштабным коэффициентом степени |
|---|---|
| -99 | 1.60210E-20 |
| 0.00001 | 6.02252e23 |
| 9.6397238 | |

*Арифметические операции*

<table>
<tr><td>Операция</td><td>Обозначения</td><td rowspan="8">Сложение со скаляром<br>$B := A-1 := \begin{pmatrix}0&1&2\\3&4&5\\6&7&8\end{pmatrix}$</td></tr>
<tr><td>Транспонирование</td><td>‘</td></tr>
<tr><td>Сложение</td><td>+</td></tr>
<tr><td>Вычитание</td><td>-</td></tr>
<tr><td>Умножение</td><td>*</td></tr>
<tr><td>Правое деление</td><td>/</td></tr>
<tr><td>Левое деление</td><td>\</td></tr>
<tr><td>Степень</td><td>^</td></tr>
</table>

*Применение комплексных чисел*

Сначала создают мнимую единицу г = sqrt(-1) или j = sqrt(-1). ЗатЕМ задают комплексные выражения ($z = 3 + 4i$ , $w = re^{iQ}$)

<table>
<tr><td>Ввод</td><td>Матрица</td></tr>
<tr><td>$Z=[(1+j)\ (2+2j);(3+3j)\ (4+4j)]$</td><td rowspan="2">$Z=\begin{pmatrix}1+i&2+2i\\3+3i&4+4i\end{pmatrix}$</td></tr>
<tr><td>$Z=[1\ 2;3\ 4]+i[1\ 2;3\ 4]$</td></tr>
</table>

## *Лекция 3.* Основные функции SCILAB и их форматы

*Функции матричного аргумента*

| Название | Обозначение |
|---|---|
| Матричная экспонента | expm |
| Матричный логарифм | logm |
| Матричный кв.корень | sqrtm |

*Операции над массивами* (обозначаемых символами * , / , ^ , но впереди ставится точка). Для X = [1 2 3] и У = [4 5 6]

| Операция | Результат |
|---|---|
| $X.*Y$ | $[1\cdot 4\quad 2\cdot 5\quad 3\cdot 6]=[4\quad 10\quad 18]$ |
| $Y./X$ | $[4/1\quad 5/2\quad 6/3]=[4.0000\quad 2.5000\quad 2.0000]$ |
| $Y.\verb|^|X$ | $[1.\verb|^|4\quad 2.\verb|^|5\quad 3.\verb|^|6]=[1\quad 32\quad 729]$ |

| | |
|---|---|
| $X.\hat{}2$ | $[1.\hat{}2 \quad 2.\hat{}2 \quad 3.\hat{}2] = [1 \quad 4 \quad 9]$ |
| $2.\hat{}\,diag(X)$ | $\begin{bmatrix} 2^1 & 2^0 & 2^0 \\ 2^0 & 2^2 & 2^0 \\ 2^0 & 2^0 & 2^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 8 \end{bmatrix}$ |

*Операции отношения* (сравнение между парами соответствующих элементов)

| Отношение | Обозначение |
|---|---|
| Меньше | < |
| Меньше или равно | <= |
| Больше | > |
| Больше или равно | >= |
| Равно | == |
| Не равно | ~= |

*Логические операции*

| Отношение | Обозначение |
|---|---|
| И (Конъюнкция) | & |
| ИЛИ (Дизъюнкция) | \| |
| НЕ (Отрицание) | ~ |

*Двоеточие*

| | |
|---|---|
| $X = 1:5$ | $X = [1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5]$ |
| $Y = 1:2:10$ | $Y = [1 \quad 2 \quad 5 \quad 7 \quad 9]$ |

*Операторы циклов*

| | |
|---|---|
| for X =< Выражение ><br>    < Операторы >;<br>end | for X1 =< Выражение ><br>    for X2 =< Выражение ><br>        Операторы >;<br>    end<br>end |
| while < Логическое выражение ><br>    < Операторы >;<br>end | |

*Оператор условия*

```
if  < Условие >
    < Операторы >;
else
    < Операторы  >;
end
```

*Оператор переключения*

```
    switch <переменная оператора>
        case  <значение 1 >
                  < Операторы 1 >;
        case  <значение 2>
                  < Операторы 2>;
       ...
        otherwise
                  < Операторы >;
    end
```

*Функции*

| Обозначение | Функция |
|---|---|
| abs | Модуль |
| sqrt | Квадратный корень |
| real | Действительная часть |

| | |
|---|---|
| imag | Мнимая часть |
| conj | Комплексно сопряженное |
| round | Округление |
| sign | Функции знака |
| rem | Остаток |
| sin | Синус |
| cos | Косинус |
| tan | Тангенс |
| asin | Арксинус |
| acos | Арккосинус |
| atan | Арктангенс |
| sinh | Синус гиперболический |
| cosh | Косинус гиперболический |
| tanh | Тангенс гиперболический |
| exp | Экспонента по основанию е |
| log | Натуральный логарифм |
| log10 | Логарифм по основанию 10 |

## Лекция 4 Случайные процессы. Законы распределения дискретных и непрерывных величин.

*Средние величины*

| *Параметр совокупности из n элементов* | *Числовой эквивалент* | *Средняя величина* |
|---|---|---|
| Сопротивление последовательно соединенных резисторов | $R_Э = \sum_{i=1}^{n} R_i$ | $R_C = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} R_i$ |
| Сопротивление параллельно соединенных резисторов | $\frac{1}{R_Э} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{R_i}$ | $R_C^{-1} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} R_i$ |
| Площадь кругов | $S_Э = \sum_{i=1}^{n}\frac{\pi d_i^2}{4}$ | $\frac{\pi d_Э^2}{4} = \frac{1}{n}S_Э \Rightarrow d_C^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d_i^2$ |
| Объем шаров | $V_Э = \sum_{i=1}^{n}\frac{4\pi d_i^3}{3}$ | $\frac{4\pi d_Э^3}{3} = \frac{1}{n}V_Э \Rightarrow d_C^3 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d_i^3$ |
| Размер многомерного параллелепипеда | $V_Э = \prod_{i=1}^{n} x_i$ | $x_i^n = V_Э \Rightarrow x_Э = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} \Leftrightarrow$ <br> $\ln x_C = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$ |
| Центр масс материальных точек | $S_X = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i$ <br> $S_y = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i$ <br> $S_Z = \sum_{i=1}^{n} m_i z_i$ | $x_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}, y_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}, z_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$ |

| | | |
|---|---|---|
| Центр инерции материальных точек | $S_X^2 = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i^2$ <br> $S_Y^2 = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i^2$ <br> $S_Z^2 = \sum_{i=1}^{n} m_i z_i^2$ | $x_C^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i^2}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$ <br> $y_C^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i^2}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$ <br> $z_C^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i z_i^2}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$ |

Обобщение

$$f(x_C) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \quad \Rightarrow \quad x_C = c(X, f)$$

Примеры:

1. Среднее логарифмическое

$$\ln z = \frac{1}{2}(\ln x + \ln y) \Rightarrow z = \sqrt{xy}$$

2. Среднее косинусоидальное (абсцисса $\gamma$ точки деления отрезка синусоиды интервала $[\alpha, \beta]$ на равновеликие части)

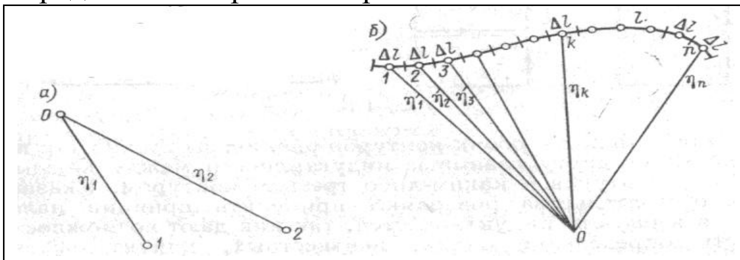
$$\int_{\alpha}^{\gamma} \sin x dx = \int_{\gamma}^{\beta} \sin x dx \Rightarrow \cos\gamma = \frac{\cos\alpha + \cos\beta}{2}$$

Соотношение средних величин

$$\frac{\mathrm{n}}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}} \le \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \ldots a_n} \le \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \le \sqrt{\frac{a_1{}^2 + a_2{}^2 + \cdots + a_n{}^2}{n}}$$

*Средние расстояния*

Среднее геометрическое расстояние точки от конечной совокупности точек

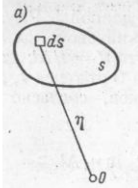
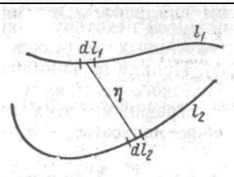
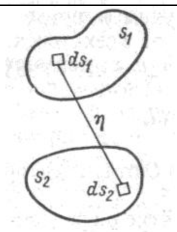
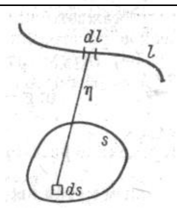
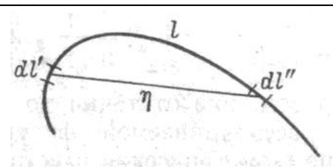
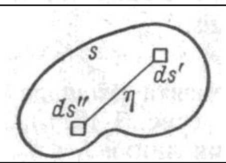
| | |
|---|---|
|  <br> a b | от точек 1 и 2 <br> $g = \sqrt{\eta_1 \eta_2}$ |
| | от точек 1,2, …n <br> $g = \sqrt[n]{\eta_1 \eta_2 \ldots \eta_n}$ или <br> $\ln g = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln \eta_k$ |

от бесконечной совокупности точек

$$n = \frac{l}{\Delta l} \quad \Rightarrow \quad \ln g = \frac{1}{l}\sum_{k=1}^{n} \ln \eta_k \Delta l \quad .$$

В пределе $\ln g = \frac{1}{l}\int_{l} \ln\eta \; dl$, где $\eta$ - расстояние от точки 0 до элемента dl.

Другие средние геометрические расстояния

| | | |
|---|---|---|
| от точки до площади | $\ln g = \frac{1}{s}\int\limits_{l} \ln\eta \; ds$ |  |
| между линиями | $\ln g = \frac{1}{l_1 l_2}\int\limits_{l_1}\int\limits_{l_2} \ln\eta \; dl_1 dl_2$ |  |
| между площадями | $\ln g = \frac{1}{s_1 s_2}\int\limits_{l_1}\int\limits_{l_2} \ln\eta \; ds_1 ds_2$ |  |
| линии от площади | $\ln g = \frac{1}{ls}\int\limits_{l} \ln\eta \; dlds$ |  |
| линии от самой себя | $\ln g = \frac{1}{l^2}\int\limits_{l}\int\limits_{l} \ln\eta \; dl'dl''$ |  |
| площади от самой себя | $\ln g = \frac{1}{s^2}\int\limits_{l}\int\limits_{l} \ln\eta \; ds'ds''$ |  |

*Функции mean и std*
Форматы:
mean(X), mean(X,dim), std(X), std(X,flag), std(X,flag,dim) ( dim=1,2,..– размерность,flag={0,1})

| | | |
|---|---|---|
| >> X=[1 2 3 4;<br>2 3 4 5;<br>3 4 5 6] | X =<br>1 2 3 4<br>2 3 4 5<br>3 4 5 6 | |
| >> mean(X) или<br>>> mean(X,1)<br>(по разм-ти 1) | ans =<br>2 3 4 5 | $\frac{1}{3}\sum_{1}^{3}\boxed{\begin{matrix}1&2&3&4\\2&3&4&5\\3&4&5&6\end{matrix}}$<br>$\downarrow \; \downarrow \; \downarrow \; \downarrow$<br>2 3 4 5 |
| >> mean(X,2)<br>(по разм-сти 2) | ans =<br><br>2.5000<br><br>3.5000 | $\frac{1}{4}\sum_{1}^{4}\boxed{\begin{matrix}1&2&3&4\\2&3&4&5\\3&4&5&6\end{matrix}}\begin{matrix}\to 2{,}5\\\to 3{,}5\\\to 4{,}5\end{matrix}$ |

| | | |
|---|---|---|
| | 4.5000 | |
| >> std(X)<br>или<br>>> std(X,0)<br>или<br>>> std(X,0,1)<br>(несмещенная по разм-ти 1) | ans<br>1 1 1<br>1 | $\sqrt{\frac{1}{2}\sum_{1}^{3}\boxed{\begin{matrix}(1-2)^2 & (2-3)^2 & (3-4)^2 & (4-5)^2\\(2-2)^2 & (3-3)^2 & (4-4)^2 & (5-5)^2\\(3-2)^2 & (4-3)^2 & (5-4)^2 & (6-5)^2\end{matrix}}}$<br>$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$<br>1 1 1 1 |
| >> std(X,0,2)<br>(несмещенная по разм-ти 1) | ans =<br>0.8165<br>0.8165<br>0.8165<br>0.8165 | $\sqrt{\frac{1}{3}\sum_{1}^{3}\boxed{\begin{matrix}(1-2)^2 & (2-3)^2 & (3-4)^2 & (4-5)^2\\(2-2)^2 & (3-3)^2 & (4-4)^2 & (5-5)^2\\(3-2)^2 & (4-3)^2 & (5-4)^2 & (6-5)^2\end{matrix}}}$<br>$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$<br>0.8165 0.8165 0.8165 0.8165 |
| >> std(X,0,2)<br>(несмещенная по разм-ти 2)<br>или | ans =<br><br>1.2910<br><br>1.2910<br><br>1.2910 | $\sqrt{\frac{1}{3}\sum_{1}^{3}\boxed{\begin{matrix}(1-2{,}5)^2 & (2-2{,}5)^2 & (3-2{,}5)^2 & (4-2{,}5)^2\\(2-3{,}5)^2 & (3-3{,}5)^2 & (4-3{,}5)^2 & (5-3{,}5)^2\\(3-3{,}5)^2 & (4-3{,}5)^2 & (5-3{,}5)^2 & (6-3{,}5)^2\end{matrix}}}\begin{matrix}\to 1{,}2910\\\to 1{,}2910\\\to 1{,}2910\end{matrix}$ |
| >> std(X,1,2)<br>(несмещенная по разм-ти 2) | ans =<br><br>1.1180<br><br>1.1180<br><br>1.1180 | $\sqrt{\frac{1}{4}\sum_{1}^{3}\boxed{\begin{matrix}(1-2{,}5)^2 & (2-2{,}5)^2 & (3-2{,}5)^2 & (4-2{,}5)^2\\(2-3{,}5)^2 & (3-3{,}5)^2 & (4-3{,}5)^2 & (5-3{,}5)^2\\(3-3{,}5)^2 & (4-3{,}5)^2 & (5-3{,}5)^2 & (6-3{,}5)^2\end{matrix}}}\begin{matrix}\to 1{,}1180\\\to 1{,}1180\\\to 1{,}1180\end{matrix}$ |

## Лекция 5. Статистическая обработка данных

*Пакет Statistics Toolbox*

В пакете *Statistics Toolbox* используются 20 различных типов распределения вероятностей. С каждым законом распределения связаны:

• плотность распределения вероятностей или функция плотности вероятности (*probability density function - pdf*) *f(x)*;

• интегральная функция распределения (*cumulative distribution function - cdf) F(x)*;

• функция, обратная интегральной функции распределения $F^{-1}(x)$;

• генерация случайных чисел;

• среднее значение и дисперсия как функции параметров распределения;

• функции оценки параметров закона распределения.

***Функция плотности вероятности***

| Имя функции | Закон распределения |
|---|---|
| *betapdf*<br>*binopdf* | Бета-распределение<br>Биномиальный |
| *chi2pdf* | Хи-квадрат |
| *exppdf* | Экспоненциальный |

| | |
|---|---|
| *fpdf* | Фишера |
| *gampdf* | Гамма-распределение |
| *geopdf* | Геометрический |
| *hygepdf* | Гипергеометрический |
| *lognpdf* | Логнормальный |
| *nbinpdf* | Отрицательный биномиальный |
| *ncfpdf* | Нецентральное (смещённое) распределение Фишера |
| *nctpdf* | Нецентральное (смещённое) распределение Стьюдента |
| *ncx2pdf* | Нецентральное (смещённое) Хи-квадрат распределение |
| *pdf* | Закон распределения задаётся как аргумент функции |
| *poisspdf* | Пуассона |
| *raylpdf* | Рэлея |
| *tpdf* | Стьюдента |
| *unidpdf* | Дискретное равномерное распределение |
| unifpdf | Равномерный (прямоугольный) |
| weibpdf | Вейбулла |

***Интегральные функции распределения*** вероятностей *F(x)* имеют имена, отличающиеся окончанием *cdf* (вместо *pdf*).

**Пример.** Для экспоненциального закона распределения с параметром $\lambda$ =1 определить значение интегральной функции в точке $x$ = 2.

Решение

| | |
|---|---|
| *» expcdf(2,1)* | *ans = 0.8647* |

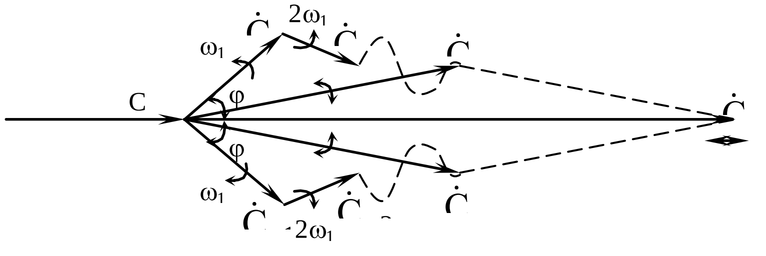
***Функции, обратные интегральным функциям распределения*** $F^{-1}(x)$ образуется из имени закона распределения и окончания *inv*.

**Пример.** Для экспоненциального распределения с параметром $\lambda = 1$ определить значение *x*, соответствующее значению интегральной функции распределения 0.8647

| | |
|---|---|
| *>> expinv(0.8647, 1)* | *ans =2.0003* |

**4 Спектральный анализ**

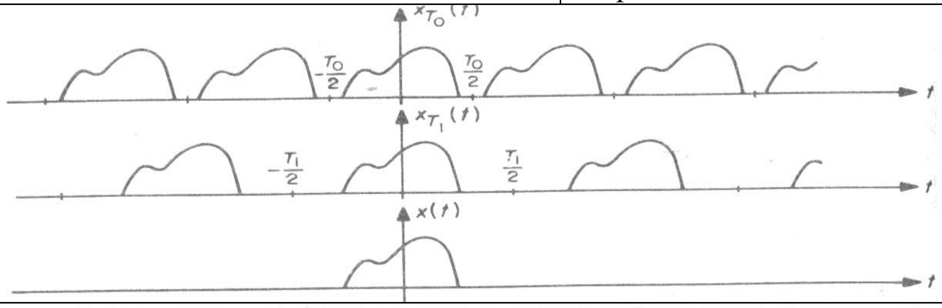
*Комплексный ряд Фурье для периодической функции*

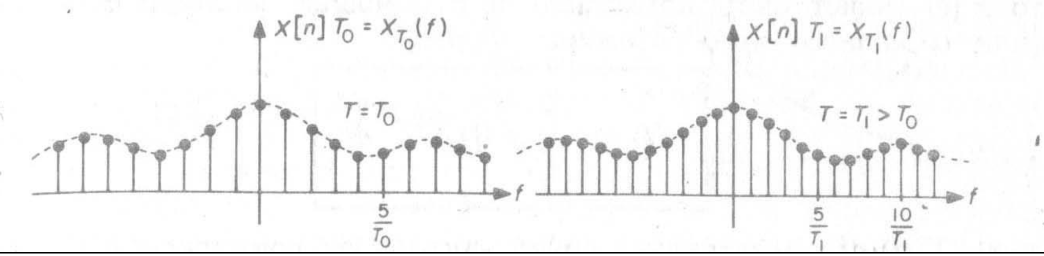
| | |
|---|---|
|   | $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c(n) e^{j\frac{2\pi}{T}nt}$ <br> где <br> $c_n = c(n) = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-j\frac{2\pi}{T}nt}$ |

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2},\ c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2},\ a_n = c_n + c_{-n},\ b_n = i(c_n - c_{-n}),\ X_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = 2\sqrt{c_n c_{-n}}$$

| |
|---|
| Для $x'(t)$ с периодом 2T |

| | |
|---|---|
| $c'_n = \frac{1}{2T}\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)e^{-j\frac{\pi}{T}nt} \qquad c'_n = \frac{1}{2}c_{2n}$ | Спектральные составляющие следуют в два раза чаще.<br>Интенсивность каждой из них пропорционально уменьшается.<br>Форма огибающей не изменяется. |




*Для апериодической функции*

$x(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} c(\omega)e^{j\omega t}d\omega$, где $c(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$. Для одиночного импульса

$$x(t) = \begin{cases} 1, & t \in [-\tau/2, \tau/2] \\ 0, & t \notin [-\tau/2, \tau/2] \end{cases} \Rightarrow c(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt = \int\limits_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-j\omega t}dt =$$

$$= -\frac{1}{j\omega}\left(e^{-j\frac{\omega\tau}{2}} - e^{j\frac{\omega\tau}{2}}\right) = \frac{2}{\omega}\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) = \tau\frac{\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}{\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}.$$

## *Лекция 6.* **Методы спектрального анализа.**

***Коэффициенты ряда Фурье***

Связь коэффициентов

$$c_0 = \frac{a_0}{2},$$

$$c_k = \frac{a_k - jb_k}{2} = \frac{A_k}{2}e^{-jarctg\left(\frac{b_k}{a_k}\right)},\ c_{-k} = \frac{a_k + jb_k}{2} = \frac{A_k}{2}e^{jarctg\left(\frac{b_k}{a_k}\right)} = \tilde{c}_k$$

$$a_k = c_k + c_{-k},\ b_k = j(c_{-k} - c_k)$$

$$A_k^2 = a_k^2 + b_k^2 = (c_k + c_{-k})^2 - (c_{-k} - c_k)^2 = 4c_k c_{-k},$$

$$A_k = 2\sqrt{c_k c_{-k}} = 2\sqrt{c_k \tilde{c}_k}$$

$$tg(\varphi) = \frac{b_k}{a_k} = j\frac{c_{-k} - c_k}{c_{-k} + c_k}$$

$$2c_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}\, e^{-jarctg\frac{b_k}{a_k}} = A_k e^{-j\varphi_k}$$

Асимптотика

$$\lim a_k\Big|_{k\to\infty} = 0, \qquad \lim b_k\Big|_{k\to\infty} = 0$$

Равенство Ляпунова

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(t)dt = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=0}^{\infty}\left(a_k^2 + b_k^2\right)$$

Интегральная формула Дирихле (частная сумму ряда Фурье)

$$s_n(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\tau)d\tau + \sum_{k=1}^{n}\left(a_k \cos kt + b_k \sin kt\right) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t+u)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{2\sin\left(\frac{u}{2}\right)}du$$

***Спектр симметричной импульсной последовательности***

Рассмотрим периодическую последовательность импульсов длительностью $\tau_P$, симметричных относительно оси ординат:

$$r(T,\tau_P,t) = \begin{cases} 0 \quad при \quad -\dfrac{T}{2} < t < -\dfrac{\tau_P}{2} \\ 1 \quad при \quad -\dfrac{\tau_P}{2} \le t \le \dfrac{\tau_P}{2} \\ 0 \quad при \quad \dfrac{\tau_P}{2} < t < \dfrac{T}{2} \end{cases}, \tag{1}$$

где T-период последовательности.

Представляем (1) в виде комплексного ряда:

$$r(T,\tau_P,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r_n \cdot e^{jn\omega\cdot t}, \tag{2}$$

где

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \tag{3}$$

$$r_n = \frac{1}{T}\cdot\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} r(T,\tau_P,t)\cdot e^{-jn\omega\cdot t}\cdot dt, \tag{4}$$

После подстановки (1) в (4) получим:

$$r_n = \frac{1}{T}\cdot\int_{-\frac{\tau_P}{2}}^{\frac{\tau_P}{2}} e^{-jn\omega\cdot t}dt = -\frac{1}{jn\omega T}\left(e^{-jn\omega\cdot\frac{\tau_P}{2}} - e^{jn\omega\cdot\frac{\tau_P}{2}}\right), \tag{5}$$

С учетом (3) преобразуем (5) к виду:

$$r_n = -\frac{1}{j2\pi n}\left(e^{-jn\pi\cdot\frac{\tau_P}{T}} - e^{jn\pi\cdot\frac{\tau_P}{T}}\right), \tag{6}$$

Воспользуемся формулой Эйлера:

$$\frac{e^{jn\pi\cdot\frac{\tau_P}{T}}-e^{-jn\pi\cdot\frac{\tau_P}{T}}}{2j}=\sin\left(n\pi\cdot\frac{\tau_P}{T}\right), \qquad (7)$$

С ее помощью преобразуем (6) к виду:

$$r_n=\frac{1}{\pi n}\sin\left(n\pi\cdot\frac{\tau_P}{T}\right), \qquad (8)$$

Из (2) и (8) следует:

$$r(T,\tau_P,t)=\frac{\tau_P}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\sin\left(n\pi\frac{\tau_P}{T}\right)}{\left(n\pi\frac{\tau_P}{T}\right)}\cdot e^{jn\frac{2\pi}{T}t}, \qquad (9)$$

т. к. $\left(e^{jn\frac{2\pi}{T}t}+e^{-jn\frac{2\pi}{T}t}\right)=2\cos\left(n\frac{2\pi}{T}t\right)$, то из (9) следует:

$$r(T,\tau_P,t)=\frac{2\tau_P}{T}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin\left(n\pi\frac{\tau_P}{T}\right)}{\left(n\pi\frac{\tau_P}{T}\right)}\cos\left(n\frac{2\pi}{T}t\right)$$

Введем безразмерные параметры:

$$\theta=\frac{t}{T}, \qquad \gamma_P=\frac{\tau_P}{T} \qquad (10)$$

С учетом (10) представим (9) в виде:

$$r(T,\gamma_P,\theta)=2\gamma_P\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(n\pi\gamma_P)}{(n\pi\gamma_P)}\cos(2n\pi\theta),$$ где $\theta\in[0,1],\gamma\in[0,1]$

или

$$r(1,\gamma_P,\theta)=\gamma_P\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\sin(n\pi\gamma_P)}{(n\pi\gamma_P)}e^{jn2\pi\theta}, \qquad (11)$$

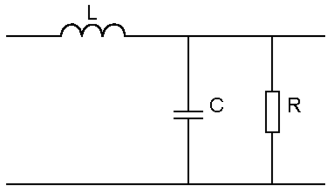
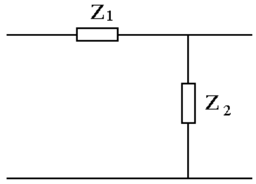
**Частотные характеристики звена**

Основные характеристики связаны следующими соотношениями:

$$K(\omega)=\sqrt{r^2(\omega)+v^2(\omega)}, \qquad \varphi(\omega)=arctg\,\frac{v(\omega)}{r(\omega)},$$

$$r(\omega)=K(\omega)\cos\varphi(\omega), \qquad v(\omega)=K(\omega)\sin\varphi(\omega).$$

**Пример**

| Схема звена | Эквивалентная схема | Формулы |
|---|---|---|
|   |   | $Z_1(p)=pL, \quad Z_2(p)=\dfrac{R\dfrac{1}{pC}}{R+\dfrac{1}{pC}}$ |

***Передаточная функция***

$$U_2(p)=\frac{Z_2(p)}{Z_1(p)+Z_2(p)}U_1(p),$$

где $U_1(p)$ и $U_2(p)$ - изображения входного и выходного напряжений.

В соответствии с этим

$$W(p)=\frac{1}{p^2\omega_0^{-2}+p\tau+1}, \text{ где } \omega_0=\frac{1}{LC}, \quad \tau=\frac{L}{C}$$

***Частотные характеристики***

После подстановки $p=j\omega$ в W(p) получим:

$$W(j\omega)=\frac{1}{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)+j\omega\tau}$$

откуда

| АЧХ | ФЧХ |
|---|---|
| $\lvert K(j\omega)\rvert=\lvert W(j\omega)\rvert=\dfrac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2+\omega^2\tau^2}}$ | $\varphi(\omega)=\arg\left(W(j\omega)\right)=-arctg\,\dfrac{\omega\tau}{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)}$ |

| Вещественная | Мнимая |
|---|---|
| $r(\omega)=\mathrm{Re}\left[W(j\omega)\right]=-\dfrac{\omega\tau}{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2+(\omega\tau)^2}$ | $r(\omega)=\mathrm{Im}\left[W(j\omega)\right]=\dfrac{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)}{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2+(\omega\tau)^2}$ |

## Лекция 7. Задачи аппроксимации. Требования к аппроксимирующим функциям

Одной из задач экспериментального исследования является установление математического описания модели, т.е. определение на основании полученной опытным путем совокупности пар векторов $(X_1,У_1),(X_2,У_2),\ldots(X_p,У_q)$ аналитического выражения (аппроксимирующей функции)

$$У=f(x),$$

связывающего векторы входных и выходных параметров. Это выражение часто называют эмпирической формулой.


Рис.4. Упрощенная модель объекта

Для решения такой задачи формулу

лируют критерии выбора функции $f(x)$. В ряде случаев в качестве критерия выступает требование прохождения функцией конкретных точек пространства входных и выходных параметров. Это требование выражается заданием системы уравнений вида

$$У_i = f(X_i).$$

Наиболее часто критерием служит требование минимума квадратического отклонения функции от экспериментальных значений

$$\sum_{i=1}^{n} [У_i - f(X_i)]^2 = \min \quad (2.4.)$$

Это требование положено в основу достаточно хорошо разработанного метода наименьших квадратов.

Возможны формулировки и других критериев. Они определяются конкретными особенностями выполняемых исследований.

В том случае, когда векторы входных и выходных сигналов являются однокомпонентными, $X = (x), \quad У = (y)$, задача выбора аналитического вида функции решается сравнительно просто. Из множества известных элементарных функций синтезируют такую аналитическую зависимость

$$y = f(x, a_1, a_2, \ldots a_r) \ , \qquad (2.5)$$

где $a_1, a_2, \ldots a_r$ - некоторые константы, которые качественно отражают характер экспериментальных данных. Затем, используя тот или иной критерий, налагают на эту функцию дополнительные требования, с помощью которых производят определение численных значений, входящих в нее постоянных коэффициентов.

На практике в качестве примера варианты аппроксимирующих зависимостей основной кривой намагничивания магнитного материала $B = B(H)$, приведенной на рис.5.

Рис.5. Кривая намагничивания

Среди простейших зависимостей, имеющих качественное соответствие с графиком, выделим следующее:

$$B = a_1 \cdot arctg\, a_2 H\ ,$$

(2.6)

$$B = a_1 \cdot th a_2 \cdot H\ ,$$

$$B = \begin{cases} a_1 H & при \quad 0 \le H \le a_3 \\ a_1 H + a_2 & при \quad a_3 \langle H \end{cases}$$

,

а также

$$H = a_1 (e^{a_2 B} - 1),$$

$$H = a_1 B + a_2 B^3,$$

$$H = \frac{a_1 B}{1 - a_2 B}$$, где $a_1, a_2, a_3$ - постоянные для данного материала величины.

Зависимости (2.6) – (2.11) обладают различными аналитическими свойствами. Например, зависимости (2.6), (2.7) и (2.10) обладают свойством центральной симметрии, т.к. $B(-H) = -B(H)$, а зависимости (2.8), (2.9) и (2.11) таким свойством не обладают, зависимости (2.6), (2.7) и (2.9), (2.10), (2.11) обладают непрерывными производными, зависимость (8) имеет скачок производной в точке $H = a_3$ и т.д. Кроме того, указанные зависимости в значительной степени могут отличаться по степени соответствия критерию. Так для пермаллоя 79 НМ, как показал анализ [17] величина минимального среднеквадратического отклонения для зависимости (2.6) составляет 2,58% в то время как для зависимости (2.8) и (2.11) соответственно 18,2% и 33,5%. Поэтому при выборе аппроксимирующих функций кривой намагничивания встает вопрос об определении зависимости с наилучшими аппроксимирующими свойствами. Отбор по критерию минимума квадратического отклонения показал, что для различных ферромагнитных материалов такие функции различны. Так для пермаллоя 79 НМ наилучшей в указанном смысле обладает зависимость $B = 0{,}48\, arctg\; 0{,}30\, H$, для феррита 2000 НМ – зависимость $B = 0{,}14\, arctg\; 0{,}07\, H$, для феррита 2000 НН – зависимость $B = 0{,}20\, th\, 0{,}04\, H$, а для сталей Э42 и Э340 толщиной 0,35 мм – соответственно зависимости $B = 0{,}89\, arctg\; 0{,}009\, H$, $B = 0{,}94\, arctg\; 0{,}013\, H$.

Установление численного значения коэффициентов для различных аналитических зависимостей (2.5) в ряде случаев представляет собой сложную задачу. Наиболее просто она решается при линейной зависимости вида $y = a_1 + a_2 x$. При этом с достаточной точностью часто бывает возможным использовать графический способ определения коэффициентов $a_1$ и $a_2$. Сущность его заключается в том, что в координатах $x\,0\,y$ отмечают множество точек $(x_1 y_1), (x_2, y_2), \ldots (x_{n,} y_n)$, полученных в эксперименте. Среди этих точек проводят прямую линию, соответствующую им наилучшим образом. Тангенс угла наклона этой прямой численно равен коэффициенту $a_2$, а ее начальная ордината – коэффициенту $a_1$.

Графический способ может быть использован и для аппороксимации нелинейных зависимостей. В этом случае, применяя специальные функциональные шкалы $v = v(x, y), w = w(x, y)$ предварительно производят спрямление зависимости, приводя ее к виду $w = в_1 + в_2 v$. Затем описанным выше методом определяют коэффициенты $в_1$ и $в_2$ и с их помощь. Из уравнения $w(x, y) = в_1 + в_2 \cdot v(x, y)$ находят искомую зависимость $y = f(x)$.

При выборе функциональных шкал и спрямляемых с их помощью зависимостей целесообразно использовать необходимые условия существования этих зависимостей. Сущность условий заключается в требовании соответствия некоторой средней величины функции $\bar{y}$ значению функции $y = f(\bar{x})$ $y = f(x)$, полученному на экспериментальной кривой для определенного среднего значения аргумента $\bar{x}$. Основные сведения об этих условиях приведены в таблице 3. Для вычисления средних величин при этом использовались координаты начальной $(x_1, y_1)$ и конечной $(x_n, y_n)$ точек.

Следует иметь в виду, что такой подход в целом является грубо ориентировочным, так как не учитывает поведение всех промежуточных точек $(x_i, y_i)$. Кроме того, таблица 3. схватывает небольшое количество зависимостей и может случиться, что переменные подчиняются некоторой закономерности, не вошедшей в нее.

В общем случае при произвольном виде (2.5), используя метод наименьших квадратов, составляют систему уравнений

$$\sum_{i=1}^{n} \left[ y_i - f(x_i, a_1, a_2, \ldots a_r) \right] \frac{\partial f(x_i, a_1, a_2, \ldots a_r)}{\partial a_1} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left[ y_i - f(x_i, a_1, a_2, \ldots a_r) \right] \frac{\partial f(x_i, a_1, a_2, \ldots a_r)}{\partial a_2} = 0$$

– – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – –

$$\sum_{i=1}^{n} \left[ y_i - f(x_i, a_1, a_2, \ldots a_r) \right] \frac{\partial f(x_i, a_1, a_2, \ldots a_r)}{\partial a_r} = 0$$

Таблица 2.

| Вид зависимости | $\overline{y}$ | | $\overline{x}$ | | Формула $V(x,y)$ $W(x,y)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | вид ср. величины | формула вычисления | вид ср. величины | формула вычисления | |
| $y = a_1 x + a_2$ | Арифметическая | $\frac{y_1 + y_n}{2}$ | Арифметическая | $\frac{x_1 + x_n}{2}$ | ——— |
| $y = a_1 x^{a_2}$ | Геометрическая | $\sqrt{y_1 + y_n}$ | Геометрическая | $\sqrt{x_1 - x_n}$ | $W = \lg y$, $V = \lg x$. |
| $y = a_1 \cdot a_2^x$ | Геометрическая | $\sqrt{y_1 \cdot y_n}$ | Геометрическая | $\frac{x_1 + x_n}{2}$ | $W = \lg y$ |
| $y = a_1 + \frac{a_2}{x}$ | Арифметическая | $\frac{y_1 + y_n}{2}$ | Арифметическая | $\frac{2x_1 \cdot x_n}{x_1 + x_n}$ | $W = xy$ |
| $y = \frac{1}{a_1 x + a_2}$ | Гармоническая | $\frac{2y_1 y_n}{y_1 + y_n}$ | Гармоническая | $\frac{x_1 + x_n}{2}$ | $W = \frac{1}{y}$ |
| $y = \frac{x}{a_1 x + a_2}$ | Гармоническая | $\frac{2y_1 y_n}{y_1 + y_n}$ | Гармоническая | $\frac{2x_1 \cdot x_n}{x_1 + x_n}$ | $W = \frac{x}{y}$ |
| $y = a_1 \lg x + a_2$ | Арифметическая | $\frac{y_1 + y_n}{2}$ | Арифметическая | $\sqrt{x_1 \cdot x_n}$ | $V = \lg x$ |

Решение ее относительно параметров $a_1, a_2, \ldots a_r$ определяет искомую зависимость (2.5).

## Лекция 8 Выявление существенных факторов. Оценка значений технических параметров

*Обобщенная модель технического устройства*

При анализе процессов, происходящих в электрическом устройстве, необходимо учитывать его взаимодействие с источником энергии (аккумулятор, генератор, датчик параметров технологического процесса, …) и нагрузкой (электронагреватель, осветительный прибор, электродвигатель, ...).

На работу устройства могут оказывать влияние некоторые факторы внешней среды (температура воздуха, его влажность, вибрация, ...)

Результатом работы устройства может явиться выполнение ряда дополнительных функций, несоответствующих его прямому назначению (генерирование реактивной мощности, генерирование высших гармоник, формирование помех, создание теплового поля, ...).

В соответствии с изложенным для анализа устройства предлагается использовать модель, приведенную на рис.1

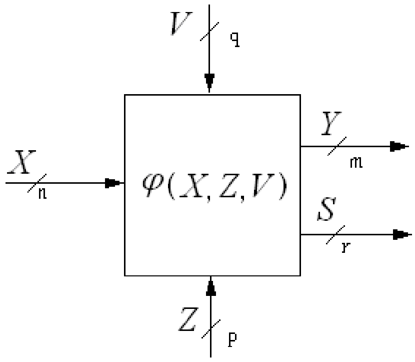



Рис. 1. Модель электрического устройства

В этой модели источники представлены совокупностью входных воздействий $X$, совокупностью управляющих воздействий $Z$ и совокупностью внешних факторов $V$, представленных векторами соответствующих им параметров $X=\lfloor x_1 \quad x_2 \quad \ldots \quad x_{\mathrm{n}} \rfloor$, $Z=\lfloor z_1 \quad z_2 \quad \ldots \quad z_p \rfloor$ и $V=\lfloor v_1 \quad v_2 \quad \ldots \quad v_q \rfloor$. Откликами на воздействие источников являются основные и сопутствующие параметры $Y$ и $S$, представленные векторами $Y=\lfloor y_1 \quad y_2 \quad \ldots \quad y_{\mathrm{m}} \rfloor$ и $S=\lfloor s_1 \quad s_2 \quad \ldots \quad s_r \rfloor$.

Физический смысл всех параметров, их количество и диапазон числовых значений определяются назначением и особенностями функционирования устройства.

***Вектор входных воздействий***

Компонентами вектора *X* могут являться, например,

- уровень напряжения батареи,
- амплитуда, частота или начальная фаза э.д.с. сети,
- амплитуда и частота гармонического сигнала датчика,
- длительность и частота их следования импульсов измерительного устройства.

Каждый из компонентов $x_i$, $(i=1,2,...,n)$ имеет определенный физический смысл и характеризуется числовым значением, принадлежащим определенному диапазону с границами $x_{i\ \min}$ и $x_{i\ \max}$.

В соответствии с этим моделью входного воздействия в конкретный момент времени будет служить точка *X* n-мерного пространства с координатами $0x_1x_2...x_n$. В том случае, когда компоненты вектора в силу каких-либо причин с течением времени $t$ изменяют свои числовые значения, эта точка перемещается по траектории, описываемой пространственной кривой, заданной в координатно-параметрической форме $x_1=x_1(t), \quad x_2=x_2(t), \quad ..., \quad x_n=x_n(t)$.

Учитывая, то обстоятельство, что для каждого из компонентов вектора установлены реальные граничные, определяющие интервалы их числовых значений $\Delta x_1=[x_{1\ \min}, x_{1\ max}]$, $\Delta x_2=[x_{2\ \min}, x_{2\ max}], \ldots, \Delta x_n=[x_{n\ \min}, x_{n\ max}]$, можно утверждать, что траектория движения точки всегда будет заключена внутри *n*-мерного параллелепипеда $G_X$, заданному этими интервалами

$$X(x_1x_2...x_n) \in G_X \Leftrightarrow \bigcap_{i=1}^{n} \Delta x_i .$$

Назовем параллелепипед $G_X$ областью допустимых значений входных параметров. На рис.1 она изображена утолщенной линией

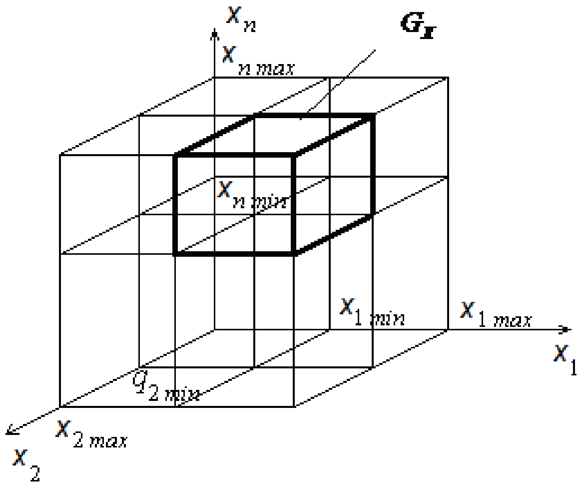



Рис.1. Область допустимых значений входных параметров

Движение точки в области $G_X$ носит случайный характер. При этом, если предположить, что изменения компонент вектора независимы и известны их плотности распределения вероятности $\varphi_1(x_1)$, $\varphi_2(x_2),\ldots,\varphi_n(x_n)$, то для вероятности появления точки $X$ внутри произвольной области $G_X$, заданной границами $[a_1,b_1]$, $[a_2,b_2],\ldots,[a_n,b_n]$, где $x_{1\ \min} \le a_1 < b_1 \le x_{1\ max}$, $x_{2\ \min} \le a_2 < b_2 \le x_{2\ max},\ldots,x_{n\ \min} \le a_n < b_n \le x_{n\ max}$, получим

$$P(X \in G_X) = \prod_{k=1}^{n}\left(\int_{a_k}^{b_k}\varphi_k(x_k)dx_k\right).$$

***Вектор управляющих воздействий***

Управляющие воздействия $Z$ характерны для устройств регулирования. Они могут быть аналоговыми, цифровыми, комбинированными. Назначением управляющего воздействия является изменение отклика $Y$ при неизменном воздействии $X$. Если в устройстве регулирование не предусмотрено, то вход $Z$ отсутствует.

При цифровом регулировании вектор $Z$ представляет собой упорядоченную последовательность логических величин $z_1, z_2,..., z_p$, являющихся его компонентами. Каждый из компонентов $z_k, (k = \overline{1, p})$ может принимать одно из двух значений (0 или 1). Воздействие его на ключевой элемент схемы устройства приводит к изменению сопротивления последнего в диапазоне с $r_{\min}$ до $r_{\max}$

$$r(z_k) = \begin{cases} r_{\min} & \text{при} \quad z_k = 1 \\ r_{\max} & \text{при} \quad z_k = 0 \end{cases}.$$

В соответствии с этим осуществляется изменение состояния схемы устройства и как следствие регулирование его выходных параметров. Общее количество возможных состояний схемы составляет $2^p$. Каждому состоянию соответствует точка $p$-мерного пространства. Сказанное поясняется рис.2, на котором изображено множество из восьми точек, соответствующих различным значениям компонентов трехразрядного управляющего кода $Z = (z_1\ z_2\ z_3)$.

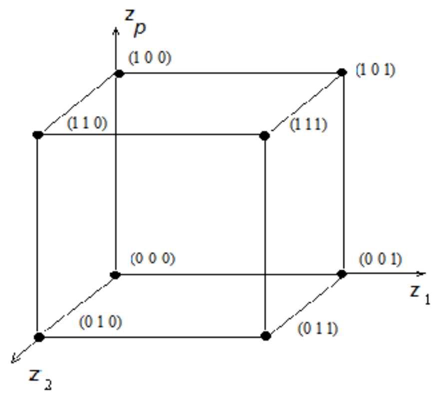


Рис.2. Варианты управляющего кода

***Вектор внешних факторов***

Вектор *V* представляет собой совокупность факторов, способных влиять на свойства элементов схемы и, следовательно, в определенной степени изменять выходные параметры устройства. Различают несколько групп факторов: климатические, механические, биологически, некоторые специфические особенности эксплуатации устройства, а также фактор времени, учитывающий старение материалов схем и износ элементов конструкций.

Моделью внешних факторов по аналогии с входными воздействиями служит точка *V* *q*-мерного пространства с координатами $0v_1v_2...v_q$, перемещается по траектории, описываемой пространственной кривой, заданной в форме $v_1 = v_1(t), \quad v_2 = v_2(t), \quad ... , \quad v_q = v_q(t)$ внутри некоторой области $G_V$.

Отличие же модели заключается в том, что общее количество компонентов вектора *V* и их перечень часто являются неопределенными, поскольку достаточно сложно бывает оценить степень влияния каждого компонента на работу устройства и выбрать среди них наиболее значимые.

Компоненты вектора *V* имеют разную физическую природу. Определение возможного диапазона их числовых значений $[v_{1\ \min}, v_{1\ max}]$, $[v_{2\ \min}, v_{2\ max}]$, … , $[v_{p\ \min}, v_{p\ max}]$, зависит от многих факторов, в частности, конкретного размещения устройства (открытая площадка, навес, отапливаемое помещение, не отапливаемое помещение), наличия механических воздействий (вибраций, ударов) и воздействия специфических факторов в процессе эксплуатации.

Поскольку внешние факторы случайны, для описания компонентов вектора *V* следует использовать функции плотности вероятностей. При этом в общем случае часть компонентов вектора может быть связана функциональной или статистической связью. Говорить о границах области $G_V$ допустимых изменений вектора *V* можно лишь в вероятностном смысле.

Количественная мера влияния каждого фактора на выходные параметры обычно отсутствует. В особенности процесс усложняется, если среди факторов появляются некоторые специфические. Для оценки возможных числовых значений диапазонов их изменения и количественной оценки степени их влияния на выходные параметры устройства требуются дополнительные исследования.

Кроме того, некоторые из внешних факторов могут находиться в статистической или функциональной зависимости. Поэтому область $G_V$ возможных значений траекторий не является параллелепипедом. Это усложняет вычисление вероятности $P(V \in G_V)$.

В том случае, когда компоненты вектора *V* распределены по нормальному закону, его плотность распределения имеет вид:

$$f\left(v_1, v_2, ..., v_k\right) = \frac{\sqrt{D}}{(2\pi)^{k/2}} e^{-\frac{1}{2}Q\left(v_1, v_2, ..., v_k\right)},$$

где $Q(v_1, v_2, ..., v_k) = \sum_{i,j} b_{ij} (v_i - m_{v_i})(v_j - m_{v_j})$ – положительно определенная квадратичная форма; $D$ – определитель, $D = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & ... & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & ... & b_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ b_{n1} & b_{n2} & ... & b_{nn} \end{vmatrix}$.

В этом случае для компонентов определения границ области $V$ может быть использован трехсигмовый допуск, включающий практически все значения случайной величины, как это показано на рис.3

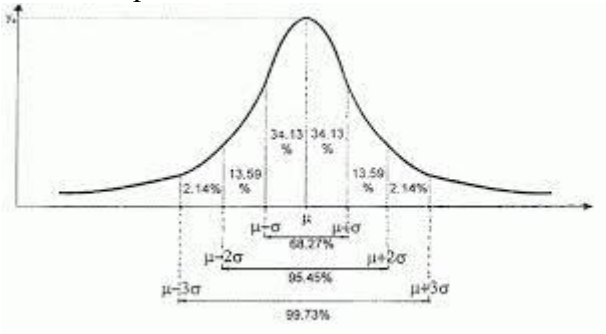



Рис.3. Нормальное распределение

В этом случае

$$(V \in G_V) \Leftrightarrow \bigcap_{k=1}^{q} [\mu(v_k) - 3\sigma(v_k) \le v_k \le \mu(v_k) + 3\sigma(v_k)],$$

где $\mu(v_k)$ и $\sigma(v_k)$ - математическое ожидание и дисперсия параметра $v_k$ .

**Вектор основных выходных параметров**

Допустимые значения основных выходных параметров $[y_{1\ \min}, y_{1\ max}]$, $[y_{2\ \min}, y_{2\ max}]$, … , $[y_{m\ \min}, y_{m\ max}]$ определяемые назначением устройства, устанавливают границы области $G_Y$ .

С формальной точки зрения электрическое устройство осуществляет преобразование

$$Y_m = \varphi \begin{pmatrix} X_n \\ Z_p \\ V_q \end{pmatrix},$$

где $\varphi$ - функция преобразования, при этом $X_n \in G_X, Z_p \in G_X, V_q \in G_X$ .

Каждому конкретному воздействию на устройство, характеризующееся тремя векторами *X, Z* и *V,* соответствует отклик в виде вектора *Y*. Предельные значения компонентов этого вектора определяют границы области $\overline{G}_Y$ фактических значений. При этом обычно она не совпадает с областью допустимых значений $G_Y$ . Для нормального же функционирования устройства необходимо выполнение условия $\overline{G}_Y \subseteq G_Y$ .

**Вектор сопутствующих выходных параметров**

Функционирование устройства часто сопровождается физическими процессами, оказывающими влияние как на само это устройство, так и на питающую сеть с подключенными к ней потребителями. Это обстоятельство должно учитываться при выборе конкретного технического решения, поскольку может привести к возникновению незапланированных потерь.

Например, регулирование мощности технологических установок часто осуществляют за сет изменения задержки момента подключения тиристорного ключа в нагрузке. При том происходит искажение формы напряжения на нагрузке и появление в сети высших гармоник тока.

Регуляторы такого типа имеют наиболее простую техническую реализацию, достаточны просты и дешевы. Однако несинусоидальная сеть содержит высшие гармоники, которые приводит к нагреву изоляционных материалов проводов сети и подключенных к ней электрических аппаратов, что в свою очередь, является причиной ускоренного старения, уменьшения технологического ресурса изоляционных материалов. В ряде случаев наличие высших гармоник способно привести к возникновению резонанса в сети и связанных с этими явлениями электрических перегрузок.

Вектор *S* учитывает те эффекты, которые устройство оказывает на другие технически объекты и человека, т. е. на окружающую среду. Этот вектор может содержать ряд блоков, характеризующих специфические особенности воздействия (электромагнитные помехи, излучение тепла, шум, вибрации, искажения напряжения сети и т. д.).

Количество компонентов *r* вектора сопутствующих выходных параметров $S = [s_1 \quad s_2 \quad \ldots \quad s_r]$ определяется технической реализацией и принципом работы устройства. В процессе регулирования при изменении управляющего кода Z происходит и изменение компонентов вектора *S*. То же самое наблюдается и при изменение компонентов векторов *X* и *V*. В соответствии можно считать, что устройство осуществляет преобразование

$$S_r = \psi\begin{pmatrix} X_n \\ Z_p \\ V_q \end{pmatrix},$$

где $\psi$ - функция преобразования, при этом $X_n \in G_X, Z_p \in G_X, V_q \in G_X$ .

Область определения этого вектора $G_S$ может быть установлена на основании специальных исследований. С формальной точки зрения принадлежность вектора *S* к области $G_S$ определяется условием

$$(X \in G_X) \cap (Y \in G_Y) \cap (V \in G_V) \Rightarrow (S \in G_S).$$

**Выявление наиболее существенных технологических факторов.**

Поскольку даже небольшое уменьшение числа факторов приводит к значительному уменьшению опытов, возникает вопрос об использовании априорной информации для предварительного отсеивания несущественных факторов. Для этой цели может быть использован метод ранговой корреляции. Он позволяет в некоторых случаях отбросить несущественные технологические факторы, основываясь на опросе мнения специалистов, работающих в данной области. Процедура определения степени влияния технологических факторов на выходной параметр этим методом сводится к следующему:

а) Возможно более широкому кругу специалистов предлагается расположить технологические факторы в порядке убывания степени их влияния на выбранный выходной параметр. При этом представляется список факторов, однако каждый из опрашиваемых может включать дополнительные факторы, если список, по его мнению, не полный.

б) Результаты опроса представляют в виде таблицы – матрицы рангов (табл. 2-14), где под каждым фактором указываются места, занимаемые им в анкетах специалистов. Иногда матрица рангов строится с учетом квалификации опрашиваемого – в этом случае показания специалистов умножаются на коэффициент, присваиваемый в соответствии с квалификацией.

Матрица рангов *Таблица 2-14*

| Специалисты | Факторы | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | . . . | $x_n$ |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1<br>2<br>3<br>.<br>.<br>.<br>$m$<br>Сумма рангов<br>Отклонение суммы рангов от среднего<br>Квадраты отклонений | $a_{11}$<br>$a_{21}$<br>$a_{31}$<br>.<br>.<br>.<br>$a_{m1}$ | $a_{12}$<br>$a_{22}$<br>$a_{32}$<br>.<br>.<br>.<br>$a_{m2}$ | $a_{13}$<br>$a_{23}$<br>$a_{33}$<br>.<br>.<br>.<br>$a_{m3}$ | $a_{ij}$ | $a_{1n}$<br>$a_{2n}$<br>$a_{3n}$<br>.<br>.<br>.<br>$a_{mn}$ |

Чем меньше сумма рангов данного фактора, тем более высокое место он занимает в ранжировке, тем большее влияние должен оказывать этот фактор на выходной параметр.

в) Последние две строки матрицы нужны для вычисления коэффициента конкордации

$$W = \frac{12H}{m^2\left(n^3 - n\right)},$$

где $H$ – сумма квадратов отклонений.

Коэффициент конкордации с помощью статистических методов позволяет определить, случайна или неслучайна согласованность во мнениях специалистов: чем выше коэффициент конкордации, тем выше степень согласования во мнениях специалистов. W = 0 означает отсутствие согласованности между ранжировками специалистов. W = 1 показывает, что специалисты одинаково расположили факторы.

г) По полученной матрице рангов строится диаграмма рангов (рис. 2-14).

Если распределение на диаграмме рангов равномерно, то все факторы должны включаться в эксперимент. Можно сказать, что опрос в этом случае не дал желательного результата.

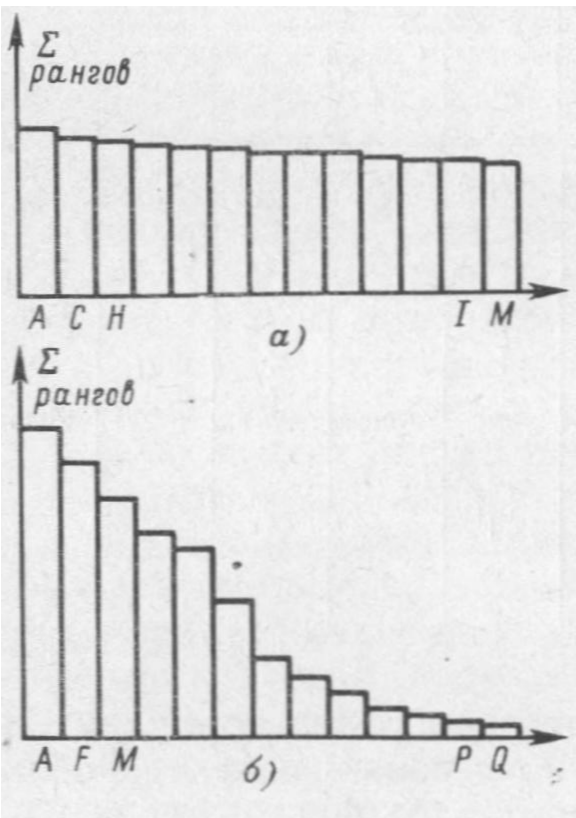


Рис. 2-14. Диаграммы рангов.

Если распределение неравномерно, однако изменение суммы рангов незначительно, то это значит, что хотя различие между факторами и делается, но делается неуверенно. Поэтому здесь также лучше все факторы включить в эксперимент (рис. 2-14,а).

Наиболее благоприятен случай быстрого экспоненциального уменьшения степени влияния факторов. В этом случае возможно отсеивание ряда факторов на основе проведенного опроса (рис. 2-14,б).

**Графическое оформление результатов**

Для графического оформления могут

быть использованы следующие команды и функции

| Функция | График |
|---|---|
| plot | В линейной системе координат |
| loglog | В логарифмической системе |
| semilogx | В полулогарифмической системе (Log X) |
| semilogy | В полулогарифмической системе (Log Y) |
| polar | В полярной системе |
| mesh | Трёхмерный |
| bar | Гистограмма |

| | |
|---|---|
| title | Создание заголовка |
| xlabel | Создание подписи к оси абсцисс |
| ylabel | Создание подписи к оси ординат |
| text | Обозначение точки данных |
| grid | Нанесение сетки |